TRANSFORMATIONS ET NOMBRES COMPLEXES

Table des matières

1 Applications géométriques des nombres complexes

1.1 Arguments d'un nombre complexe

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D

On sait que :

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- $AB = |z_B - z_A|$.
- $arg\,(z_A) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}\right) \quad (z_A \neq 0)$
- $arg\,(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right)$
- $arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right)$.

En effet : $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB}\right) = arg\,(z_D - z_C) - arg\,(z_B - z_A) = arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

1.2 Ensemble de points du plan. ROC

1.2.1 Un cercle de centre O et de rayon r

Soit r un rel strictement positif et Ω un point du plan d'affixe le nombre complexe ω.

L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - \omega| = r$ est le **cercle** de centre le point Ω et de rayon le rel r .

1.2.2 Un médiatrice

L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

1.2.3 Une droite (AB)

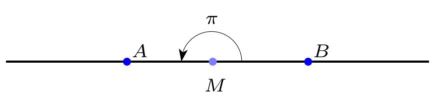
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ est réel est la droite (AB) privé du point A .

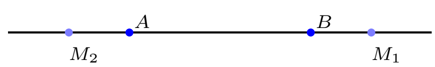
1.2.4 Un cercle de diamètre $[AB]$

L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ est imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A .

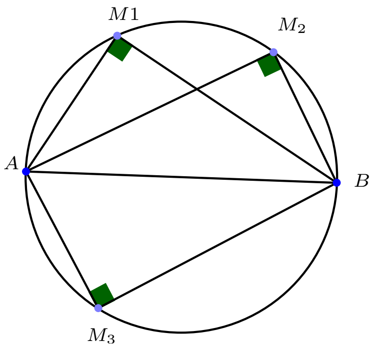
Démonstration 1

1. $|z - \omega| = r \Longleftrightarrow \Omega M = r$
2. $|z - z_A| = |z - z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$
3. *Si* $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ *est rel alors* $\left\{\begin{array}{l} arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = 0 \quad [\pi] \\ ou \\ \dfrac{z_B - z}{z_A - z} = 0 \end{array}\right.$ *ce qui signifie que* $\left\{\begin{array}{l} \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = 0 \quad [\pi] \\ ou \\ z = z_B \end{array}\right.$





4. Si $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ *est un imaginaire pur alors* $\begin{cases} arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ ou \\ \dfrac{z_B - z}{z_A - z} = 0 \end{cases}$ *ce qui signifie que* $\begin{cases} \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ ou \\ z = z_B \end{cases}$



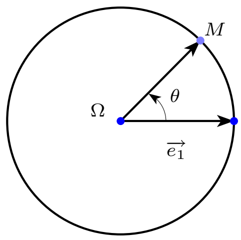
1.3 Équation paramétrique d'un cercle. ROC

Soit Ω un point du plan d'affixe le nombre complexe $\omega = x_\Omega + iy_\Omega$.
Un équation paramétrique du cercle de centre Ω et de rayon r est :

$\boxed{z = \omega + r\, e^{i\theta}}$ ou encore $\boxed{\begin{cases} x = x_\Omega + r\, \cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r\, \sin(\theta) \end{cases}}$, θ tant un réel quelconque.

Démonstration 2

Soit M, *d'affixe* z, *un point du cercle de centre* Ω *et de rayon* r.
Soit θ *une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{\Omega M}\right)$.
Nous avons donc $arg(z - \omega) = \theta \quad [2\pi]$.
D'autre part, M *tant sur le cercle on a aussi* $\Omega M = r$ *ce qui se traduit par* $|z - \omega| = r$



Ainsi le nombre complexe $z - \omega$ *a pour module* r *et un argument égal à* θ
On peut donc écrire que $z - \omega = r\, e^{i\theta}$.
En écrivant $\omega = x_\Omega + i\, y_\Omega$, $\quad r\, e^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ *et* $z = x + i\, y$
on obtient : $z - \omega = r\, e^{i\theta} \iff (x + i\, y) - (x_\Omega + i\, y_\Omega) = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$

Soit $\quad (x - x_\Omega) + i(y - y_\Omega) = r\cos(\theta) + i\, r\sin(\theta)$

Et donc $\begin{cases} x - x_\Omega = r\, \cos(\theta) \\ y - y_\Omega = r\, \sin(\theta) \end{cases}$

Exemple 1

Amérique de sud novembre 2007

Le plan $\mathcal{P}$ *est rapporté un repère orthonormal direct* $(O, \ \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v})$.
Soit f *l'application qui à tout point* M *de* P *d'affixe non nulle* z *associe le point* M' *d'affixe :* $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. *Soit* E *le point d'affixe* $z_E = -i$. *Déterminer l'affixe du point* E', *image de* E *par* f
2. *Déterminer l'ensemble des points* M *tels que* $M' = M$.
3. *On note* A *et* B *les points d'affixes respectives* 1 *et* -1 *et soit* M *un point distinct des points* O, A *et* B.
   (a) *Montrer que, pour tout nombre complexe* z *différent de* 0, 1 *et* -1, *on a :* $\dfrac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right)^2$.

(b) *En déduire une expression de* $\dfrac{M'B}{M'A}$ *en fonction de* $\dfrac{MB}{MA}$ *puis une expression de l'angle* $\left(\overrightarrow{M'A},\ \overrightarrow{M'B}\right)$ *en fonction de l'angle* $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}\right)$

4. *Soit* Δ *la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si* M *est un point de* Δ *distinct du point O, alors* M' *est un point de* Δ.

5. *Soit* Γ *le cercle de diamètre [A, B].*

(a) *Montrer que si le point* M *appartient* Γ *alors le point* M' *appartient à la droite (AB).*

(b) *Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par* f *?*

1. $z_{E'} = \dfrac{1}{2}\left(-i + \dfrac{1}{-i}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-i + \dfrac{i}{1}\right) = 0$. *E a donc pour image O.*

2. $M' = M \iff z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \iff 2z^2 = z^2 + 1 \iff z^2 = 1 \iff z = 1$ *ou* $z = -1$.
Les points invariantségaux à leur image sont donc les points d'affixe 1 *et* -1.

3. *Soit* $M(z)$ *avec* $z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq -1$.

(a) $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} = \dfrac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} = \dfrac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

(b) – $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right| \iff \dfrac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left(\dfrac{|(z+1)|}{|(z-1)|}\right)^2 \iff \dfrac{M'B}{M'A} = \left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$.

– $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \iff \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. (a) $M \in \Delta \iff MA = MB \iff \dfrac{MB}{MA} = 1$. *Et d'après la question précédente* $\dfrac{M'B}{M'A} = \left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$
Donc $\dfrac{M'B}{M'A} = 1 \iff M'B = M'A \iff M' \in \Delta$.

(b) *Si* M *appartient au cercle de diamètre [AB], alors* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Donc d'après la question précédente $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \pi \quad [2\pi]$, *donc les points A, B et* M' *sont alignés ou encore* $M' \in [AB]$.

(c) *Le cercle* Γ *a un rayon égal à* 1 *et est centré en O. Tout point* M *de* Γ *a donc une affixe de la forme* $z = e^{i\theta}$, *avec* $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. *D'o* $z' = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \dfrac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta$.
Or $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, *donc* M' *est un point du segment [AB]. Seuls les points de [AB] ont un antécédent par* f

2 Écriture complexe d'une transformation du plan

2.1 Définition

Soit T une transformation du plan qui transforme un point M d'affixe z en un autre point M' d'affixe z'.
L'écriture complexe de la transformation T est la bijection f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $z' = f(z)$.

2.2 Théorème : écriture complexe des transformations usuelles du plan. ROC

2.2.1 La translation

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b est $\boxed{z' = z + b}$.

2.2.2 L'homothétie

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport le rel k est $\boxed{z' - \omega = k(z - \omega)}$.

2.2.3 La rotation

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle le rel θ est $\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$.

2.2.4 La symétrie centrale de centre O

L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $\boxed{z' = -z}$.

2.2.5 La symétrie axiale d'axe (Ox)

L'écriture complexe de la symétrie axiale d'axe (Ox) est : $\boxed{z' = \overline{z}}$.

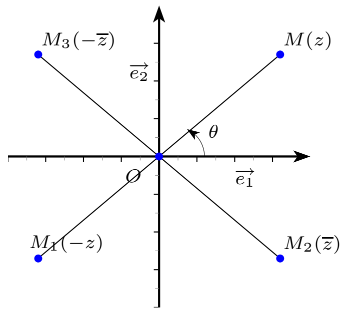
2.2.6 La symétrie axiale d'axe (Oy)

L'écriture complexe de la symétrie axiale d'axe (Oy) est : $\boxed{z' = -\overline{z}}$.

Démonstration 3

1. *Si M' est l'image du point M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ et donc $z' - z = b$.*
2. *Si M' est l'image du point M dans l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport le rel k alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et donc $z' - \omega = k(z - \omega)$.*
3. *Si M' est l'image du point M dans la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle le rel θ*
   alors $\left\{\begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array}\right.$ *et donc* $\left\{\begin{array}{l} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array}\right.$ *d'o* $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array}\right.$
   Autrement dit le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et un argument gal θ.
   Son écriture complexe est donc $e^{i\theta}$. Et donc $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$.

Pour les trois autres la figure ci-contre suffit :



Exemple 2

Déterminer la nature des transformations ayant pour écriture complexe :

$a)\quad z' = z - 1 + i \qquad b)\quad z' = \dfrac{1}{2}z - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad c)\quad z' = \sqrt{3}\,z \qquad d)\quad z' = i\,z - 3i + 3$

1. *$z' - z = -1 + i$. T est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $-1 + i$.*
2. *$z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z = e^{-i\frac{\pi}{3}}\,z$. T est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.*

3. $z' = \sqrt{3}z$. T est l'homothétie de centre le point O et de rapport le rel $\sqrt{3}$.

4. $z' = i(z-3)+3$ et donc $z'-3 = i(z-3)$. T est la rotation de centre le point Ω d'affixe 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exemple 3

France juin 2007

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

1. *Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.*
2. *Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :*

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right).$$

3. *En déduire les solutions de l'équation (E).*

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3i$ et $2-3i$.

1. *Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.*
2. *Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.*

Partie A

Soit (E) l'équation $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=0$.

1. *On a :* $\mathrm{i}^3-(4+\mathrm{i})\mathrm{i}^2+(13+4\mathrm{i})\mathrm{i}-13\mathrm{i} = -\mathrm{i}+4+\mathrm{i}-4+13\mathrm{i}-13\mathrm{i}=0$ *donc* i *est solution de (E).*
2. $(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c) = az^3+(b-a\mathrm{i})z^2+(c-b\mathrm{i})z-\mathrm{i}c$.

   Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients sont égaux. On obtient le système :
$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b-a\mathrm{i} & = & -4-\mathrm{i} \\ c-b\mathrm{i} & = & 13+4\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}c & = & -13\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ c & = & 13 \\ b-\mathrm{i} & = & -4-\mathrm{i} \\ 13-b\mathrm{i} & = & 13+4\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -4 \\ c & = & 13 \end{cases}$$
   donc $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(z^2-4z+13)$.
3. *L'équation (E) s'écrit* $(z-\mathrm{i})(z^2-4z+13)=0$.

   Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

   - $z-\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow z=\mathrm{i}$
   - $z^2-4z+13=0$.

     $\Delta=-36=(6\mathrm{i})^2<0$. *Il y a deux racines complexes conjuguées* $\frac{4-6\mathrm{i}}{2}=2-3\mathrm{i}$ *et* $2+3\mathrm{i}$.

   L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{\mathrm{i}\ ;\ 2-3\mathrm{i}\ ;\ 2+3\mathrm{i}\}$

Partie B

1. *Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.*

   Une écriture complexe de r est $z'-z_B=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-z_B) \Leftrightarrow z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2-3\mathrm{i})+2+3\mathrm{i}$.

   On en déduit $z_{A'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(-2-2\mathrm{i})+2+3\mathrm{i}=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+\mathrm{i})+2+3\mathrm{i}=-2\mathrm{i}\sqrt{2}+2+3\mathrm{i}=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)\mathrm{i}$.

2. *Les affixes de A', B et C ont la même partie réelle 2 donc les trois points sont alignés sur la droite d'équation* $x = 2$.
   A' est donc l'image de C par une homothétie de centre B et de rapport k.
   $k > 0$ *donc* $k = \dfrac{BA'}{BC} = \dfrac{3-(3-2\sqrt{2})}{3-(-3)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
   Une écriture complexe de cette homothétie est alors :
   $z' = k(z - z_B) + z_B$ *c'est-à-dire* $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(z - 2 - 3\mathrm{i}) + 2 + 3\mathrm{i}$.